E.N.S.E.T. Section B' 1985

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel réel ou complexe. On distingue deux de ses sous-espaces E_1 et E_2 tels que $E = E_1 \oplus E_2$ (somme directe de E_1 et de E_2) et on étudie certaines applications linéaires définies au moyen de leurs restrictions aux sous-espaces E_1 et E_2.

Les espaces de polynômes seront munis de leurs bases canoniques dont les éléments seront notés e_k (si x est l'indéterminée : $e_k(x) = x^k$). Les polynômes dérivés d'un polynôme P seront notés P', P".

Les applications linéaires dans les espaces de polynômes pourront être représentées par leurs images matricielles relativement aux bases canoniques. Réciproquement, une matrice étant donnée, on pourra éventuellement l'interpréter comme image matricielle d'une application linéaire dans de tels espaces.

PREMIÈRE PARTIE

$E = \mathcal{P}_5$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels dont les degrés sont inférieurs ou égaux à 5. E_1 est le sous-espace de E engendré par e_0, e_2, e_4 et E_2 est le sous-espace engendré par e_1, e_3, e_5. On vérifiera que l'on a bien $E = E_1 \oplus E_2$.

1° Soit l'application s qui, à tout polynôme P de E_1, fait correspondre le polynôme s (P) défini par :

$$s(P)(x) = (x^2 - 1)\,P''(x) + x\,P'(x).$$

a. Montrer que s est une application linéaire de E_1 dans E_1.

b. Déterminer l'image matricielle de s relativement à la base canonique de E_1.

c. Déterminer le noyau de s, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d. s est-elle diagonalisable ?

2° On considère l'application qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $2\,e_1\,P - P'$ (c'est-à-dire $x \to 2\,x\,P(x) - P'(x)$).

a. Montrer que la restriction f de cette application à l'espace E_1 est une application linéaire de E_1 dans E_2.

b. Déterminer l'image matricielle de f relativement aux bases canoniques respectives de E_1 et de E_2.

c. Montrer que f est un isomorphisme.

d. Soit Q un élément de E_2, montrer qu'il existe un polynôme unique noté Q^* tel que :

$$Q = e_1\,[Q^* \circ e_2] \text{ (c'est-à-dire } Q(x) = x\,Q^*(x^2)).$$

On considère l'application g qui associe à Q, élément de E_2, le polynôme g (Q) défini par :

$$g(Q)(x) = \tfrac{1}{2}\,[\,Q^*(x^2) + Q^{*\prime}(x^2) + Q^{*\prime\prime}(x^2)].$$

Déterminer l'application $g \circ f$; que peut-on en conclure ?

3° *a.* Soit : $P \in \mathcal{P}_5$, décomposé sous la forme unique :

$$P = P_1 + P_2 \text{ avec } P_1 \in E_1 \text{ et } P_2 \in E_2.$$

Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$ en utilisant $P(x)$ et $P(-x)$.

b. Montrer que si, à tout $P = P_1 + P_2$, on fait correspondre le polynôme :

$$F_0(P) = s(P_1) + f(P_1) + g(P_2) ;$$

l'application F_0 ainsi définie est un endomorphisme de $E = \mathcal{P}_5$. Déterminer l'image matricielle de cet endomorphisme F_0 relativement à la base canonique de $\mathcal{P}_5$.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, E est un espace vectoriel complexe, non nécessairement de dimension finie. E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, s désigne un endomorphisme de E_1, f désigne une application linéaire de E_1 dans E_2 bijective, d'inverse f^{-1}. A tout vecteur x de E, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on associe :

$$F(x) = s(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2).$$

1° *a.* Montrer que F définit une application linéaire de E dans E.

b. Montrer que F est injective.

c. Montrer que F est bijective et définir l'application inverse.

2° *a.* On suppose que F admet une valeur propre λ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de F, associé à cette valeur propre λ, décomposé en $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$). Montrer que x_1 et x_2 ne sont pas nuls et que x_1 est un vecteur propre de s.

b. Réciproquement, on suppose que s admet une valeur propre μ. Montrer que F admet au moins une valeur propre. Déterminer un vecteur propre de F en utilisant un vecteur propre x_1 de s associé à μ.

3° On suppose, dans cette question que E est de dimension finie. On pose $\dim E_1 = n$.

a. Démontrer que $\dim E_1 = \dim E_2$ et $\dim E = 2n$.

b. Soit $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$ l'ensemble des valeurs propres de s; en utilisant ce qui précède, définir les valeurs propres de F; que peut-on dire des valeurs propres de F si toutes les valeurs propres de s sont réelles ?

c. On suppose que s est diagonalisable et qu'aucun des deux nombres $2i$ et $-2i$ n'est valeur propre de s. Montrer que F est diagonalisable. (On pourra considérer une base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de E_1 constituée de vecteurs propres de s.)

4° *a.* Soit F_0 l'application de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ définie dans I. 3° *b*. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

b. On considère une matrice carrée A de 6 lignes et 6 colonnes, décomposée en 4 blocs carrés de 3 lignes et 3 colonnes, suivant le schéma :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$A_2 = A_3 =$ I matrice unité d'ordre 3,

$A_4 = 0 =$ matrice nulle d'ordre 3.

Déterminer les valeurs propres de A_1 et prouver que A est diagonalisable.

c. En utilisant un exemple simple, montrer que la conclusion de la question II. 3° *c* peut être fausse lorsque s est seulement diagonalisable.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie E désigne l'espace vectoriel $\mathfrak{P}$ de tous les polynômes réels, E_1 est le sous-espace des polynômes pairs, E_2 est le sous-espace des polynômes impairs. Vérifier que l'on a bien : $E = E_1 \oplus E_2$.

1° Soit l'application s qui associe à tout polynôme P de E_1 le polynôme $s(P)$ tel que

$$s(P)(x) = (x^2 - 1)\,P''(x) + x\,P'(x).$$

a. Montrer que s est une application linéaire de E_1 dans E_1.

b. Déterminer toutes les valeurs propres de s.

c. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $x \rightsquigarrow t_n(x) = \cos(2n \operatorname{Arccos} x)$, calculer les dérivées t_n' et t_n'' de cette fonction et déterminer $(x^2 - 1)\,t_n''(x) + x\,t_n'(x)$ sur $]-1, +1[$.

d. Montrer que t_n est la restriction à $]-1, +1[$ d'un élément T_n de l'espace E_1. Que peut-on dire de T_n relativement à s ?

e. Prouver que tous les sous-espaces propres de s sont de dimension 1.

2° Soit l'application f définie sur E_1 par :

$$f(P) = 2e_1 P - P'.$$

a. Montrer que f est une application linéaire de E_1 dans E_2.

b. Soit Q un polynôme de E_2 (donc un polynôme impair que l'on pourra écrire sous la forme $x\,Q^*(x^2)$). Résoudre l'équation différentielle :

$$2xy(x) - y'(x) = Q(x)$$

où $x \rightsquigarrow y(x)$ est la fonction inconnue et déterminer l'ensemble des solutions qui sont dans E_1. En déduire que f est bijective de E_1 sur E_2 et définir f^{-1} par une formule analogue à celle obtenue dans la première partie.

3° A tout polynôme P de la forme $P_1 + P_2$ (où $P_1 \in E_1$ et $P_2 \in E_2$), on fait correspondre

$$F_0(P) = s(P_1) + f(P_1) + f^{-1}(P_2).$$

Définir toutes les valeurs propres de F_0 et les vecteurs propres associés (on demande seulement d'exprimer ceux-ci en utilisant les polynômes T_n).

QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie, F désigne l'espace vectoriel des fonctions u indéfiniment dérivables sur $]-1, +1[$ à valeurs réelles. F_1 désigne l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $]-1, +1[$ à valeurs réelles et *impaires*, F_2 est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, sur $]-1, +1[$ à valeurs réelles et *paires*. On vérifie bien :

$$F = F_1 \oplus F_2 .$$

1° On considère l'application linéaire s de F_1 dans F_1 définie par :

$$\forall\, u \in F_1 \qquad s(u) : x \rightsquigarrow (x^2 - 1)\, u''(x) + x\, u'(x) .$$

a. Soit λ un réel donné. Résoudre sur $]-1, +1[$ l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)\, y''(x) + x\, y'(x) - \lambda\, y = 0 .$$

(On pourra utiliser le changement de variable $x = \sin t$ ou bien utiliser des fonctions analogues à celles de III.1° *c.*) Déterminer parmi les solutions de cette équation, celles qui se trouvent dans F_1. (On discutera suivant le signe de λ.)

b. Déduire, de ce qui précède, toutes les valeurs propres de s ainsi que les vecteurs propres.

2° Soit f l'application linéaire de F_1 dans F_2 définie par :

$$\forall\, u \in F_1 \qquad f(u) : x \rightsquigarrow 2\, x\, u(x) - u'(x)$$

a. Montrer que f est injective.

b. Soit v un élément de F_2, montrer que l'équation différentielle $2xy(x) - y'(x) = v(x)$ admet une solution unique dans F_1. Exprimer cette solution à l'aide d'une primitive convenable de $t \rightsquigarrow v(t)\, e^{-t^2}$. Définir l'application f^{-1}.

3° A tout $u \in F$, écrit sous la forme $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$, on fait correspondre :

$\Phi(u) = s(u_1) + f(u_1) + f^{-1}(u_2)$. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? Définir les vecteurs propres de Φ.